www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1990

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

I

On note $S(n)$ l'espace vectoriel des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels. On note $\|.\|$ la norme euclidienne et $< .,. >$ le produit scalaire canoniques de $\mathbb{R}^n$.

Soit A une matrice de $S(n)$ On lui fait correspondre :

- la forme quadratique Q représentée par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la forme bilinéaire symétrique associée B .
- ses valeurs propres, répétées selon leurs multiplicités et rangées en ordre décroissant : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$.
- une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{B} = (X_1, \cdots, X_n)$ où X_i est un vecteur propre de A associé à λ_i .

1.a) Pour $X \in \mathbb{R}^n$, exprimer $Q(X)$ en fonction des composantes de X dans la base $\mathbf{B}$. Montrer que λ_1 et λ_n sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de Q sur l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$, et que l'une de ces valeurs est atteinte en un vecteur unitaire X si et seulement si X est vecteur propre associé à la valeur propre en question.

b) Etablir un encadrement de $Q(X)$ pour $X \in \mathbb{R}^n$, en termes de λ_1 , λ_n et $\|X\|$.

c) Montrer que pour $2 \leq i \leq n-1$, λ_i est une valeur atteinte par Q dans l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$.

2.a) On suppose ici $Q(X) \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$. En utilisant les propriétés du trinôme : $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) = Q(tX+Y) = t^2Q(X) + 2tB(X,Y) + Q(Y)$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$, établir l'inégalité : $B(X,Y)^2 \leq Q(X)\ Q(Y)$.

b) On revient au cas général. Pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $< X, Y >= 0$ montrer l'inégalité : $B(X,Y)^2 \leq \left(Q(X) - \lambda_n\|X\|^2\right)\left(Q(Y) - \lambda_n\|Y\|^2\right)$. (On pourra appliquer le **a)** à la forme quadratique $Q(X) - \lambda_n\|X\|^2$). Dans les mêmes conditions établir une inégalité analogue faisant intervenir λ_1 puis en déduire au moyen de la relation classique $4ab \leq (a+b)^2$ que l'on a : $|B(X,Y)| \leq \dfrac{\lambda_1 - \lambda_n}{2}\|X\|\ \|Y\|$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension p . On considère la restriction de Q à F notée $Q_{|F}$, les valeurs propres $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_p$ d'une matrice représentative de cette forme quadratique dans une base orthonormée de F , et une base orthonormée $Y_1, \cdots, Y_p$ de F constituée de vecteurs propres de cette matrice, associés dans cet ordre aux valeurs propres précédentes.

a) Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(X_j \mid i \leq j \leq n) \cap \mathrm{Vect}(Y_k \mid 1 \leq k \leq i)$ est pour $1 \leq i \leq p$ de dimension au moins 1. En déduire la relation : $\lambda_i \geq \mu_i$ en utilisant la question **1.**

b) Etablir de manière analogue la relation : $\mu_i \geq \lambda_{n-p+i}$.

c) Qu'obtient-on comme relations entre les λ et les μ dans le cas particulier $p = n-1$?

4. On considère les matrices $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer leurs valeurs propres et vérifier sur cet exemple la propriété établie à la question précédente.

Tournez la page S.V.P.

On étudie dans la suite du problème le sous-ensemble $\Gamma(n)$ de $S(n)$ constitué des matrices dont les coefficients sont dans l'ensemble $\{0,1\}$ et dont les coefficients de la diagonale principale sont tous nuls.

II

Dans cette section on calcule les valeurs propres de matrices particulières de l'ensemble $\Gamma(n)$.

1. Soit K_n la matrice de $\Gamma(n)$ dont tous les coefficients (en-dehors de la diagonale principale) sont égaux à 1. Calculer ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

2. Soit $C_n = (c_{ij})$ la matrice de $\Gamma(n)$ définie par :
$c_{ij} = 1 \Leftrightarrow i \equiv j+1$ ou $j-1$ modulo n .
Déterminer ses valeurs propres en considérant l'action de C_n sur les vecteurs complexes Z_k $(0 \leq k \leq n-1)$, Z_k étant le vecteur de composantes $Z_{k,p} = \exp(2i\pi kp/n)$, $1 \leq p \leq n$. (N.B. : dans cette formule i désigne le complexe canonique de carré -1). On distinguera les cas n pair ou impair.

3. Soit $P_n = (\rho_{ij})$ la matrice de $\Gamma(n)$ définie par : $\rho_{ij} = 1 \Leftrightarrow |i-j| = 1$.

a) Etablir pour $n \geq 3$ une formule de récurrence entre le polynôme caractéristique $\Pi_n(\lambda) =$ dét$(P_n - \lambda\, Id)$ et ceux $\Pi_{n-1}(\lambda)$ et $\Pi_{n-2}(\lambda)$ des matrices $P_{n-1} \in \Gamma(n-1)$ et $P_{n-2} \in \Gamma(n-2)$ analogues à P_n .

b) Calculer $\Pi_1(\lambda)$ et $\Pi_2(\lambda)$. Vérifier l'égalité :

$$n \geq 1 \ : \ (-1)^n \left(x - \frac{1}{x}\right) \Pi_n \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} \ .$$

c) Déduire de ce qui précède les valeurs propres de P_n .

4. A étant une matrice de $\Gamma(n)$, $A = (a_{ij})$ telle que les sommes des coefficients de chaque ligne sont toutes égales à d , soit A' la matrice $A' = K_n - A$ avec K_n définie comme au **1.** , et $\lambda'_1 \geq \cdots \geq \lambda'_n$ ses valeurs propres. Déterminer celles-ci en fonction des valeurs propres de A en remarquant que le vecteur de composantes toutes égales à 1 est vecteur propre commun aux matrices A et K_n .

III

Pour $A \in \Gamma(n)$ on définit les entiers $1 \leq i \leq n$, $d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ et l'entier $m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$.

On conserve les notations de la section I.

1. Si $A \neq 0$ montrer que l'on a $\lambda_1 > 0 > \lambda_n$.

2. Si $X = (x_1, \cdots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on note $|X|$ le vecteur $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$. Comparer $Q(|X|)$ et $|Q(X)|$ et en déduire que pour $1 \leq i \leq n$ on a $|\lambda_i| \leq \lambda_1$.

3. a) Quels sont les coefficients de la diagonale principale de A^2 ? En déduire l'égalité $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 2m$.

b) Pour $i \geq 2$ montrer que l'on a $\dfrac{\lambda_1 + |\lambda_i|}{2} \leq \sqrt{m}$. (On comparera pour a, b réels les deux nombres $a^2 + b^2$ et $\frac{1}{2}(a+b)^2$).

c) Pour $i \geq 2$ montrer que l'on a $|\lambda_i| \leq \sqrt{m}$.

4. Etablir l'inégalité $\lambda_1 \leq \max_{1 \leq i \leq n}(d_i)$.

5. En examinant la valeur de Q sur le vecteur ayant toutes ses composantes égales à $1/\sqrt{n}$ montrer que l'on a $\lambda_1 \geq \frac{2m}{n}$.

6. En utilisant la relation établie au I **2.b)** , montrer l'inégalité : $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \dfrac{2m}{n}\right)^2\right)^{1/2} \leq \dfrac{\lambda_1 - \lambda_n}{2}$.

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail